

# Teorema de Noether no Cálculo das Variações Estocástico

Adilson C. M. Barros<sup>1</sup>  
adilson.barros@docente.unicv.edu.cv

Delfim F. M. Torres<sup>2</sup>  
delfim@ua.pt

<sup>1</sup>Departamento de Ciência e Tecnologia, Universidade de Cabo Verde  
Praia, Ilha de Santiago, Cabo Verde

<sup>2</sup>Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações  
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 3810-193 Aveiro, Portugal

## Resumo

Começamos por apresentar os problemas clássicos do cálculo das variações determinístico, dando ênfase à condição necessária de otimalidade de Euler–Lagrange e Teorema de Noether. Como exemplos de aplicação, obtemos as leis de conservação da quantidade de movimento e energia da mecânica, válidas ao longo das extremais de Euler–Lagrange. Introduzimos depois o cálculo das variações estocástico e demonstramos um teorema de Noether estocástico obtido recentemente por Cresson. Terminamos apontando um problema interessante em aberto.

**Palavras Chave:** cálculo das variações, invariância, teorema de Noether, leis de conservação, cálculo das variações estocástico, teorema de Noether estocástico.

## Abstract

We begin by presenting the classical deterministic problems of the calculus of variations, with emphasis on the necessary optimality conditions of Euler–Lagrange and the Noether theorem. As examples of application, we obtain the conservation laws of momentum and energy from mechanics, valid along the Euler–Lagrange extremals. We then introduce the stochastic calculus of variations, proving a recent stochastic Noether-type theorem obtained by Cresson. We end by pointing out an interesting open problem.

**Keywords:** calculus of variations, invariance, Noether’s theorem, conservations laws, stochastic calculus of variations, stochastic Noether’s theorem.

**2010 Mathematics Subject Classification:** 49K05, 49S05, 37H10, 60G07.

## 1 Introdução

Um dos primeiros problemas do cálculo das variações foi colocado por Galileu em 1630. Consistia em determinar a trajetória ótima que minimizasse o tempo que uma partícula demora a percorrer dois pontos dados, por ação exclusiva da gravidade. Algumas décadas mais tarde, o problema de Galileu viria a ser resolvido pelos irmãos Bernoulli, Newton, Leibniz, Euler e Lagrange, quase imediatamente a seguir à invenção do cálculo diferencial e integral por Newton e Leibniz.

O problema central do cálculo das variações consiste em encontrar uma função  $x(\cdot)$  que minimize (ou maximize) o valor de uma dada funcional integral,

$$J[x(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \longrightarrow \min, \quad (1)$$

onde  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $L : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ . Já no século XIX e princípio do século XX, muitos autores tinham contribuído para a teoria da solução de problemas deste tipo. Entre

outros, sobressaem os nomes de Weierstrass, Bliss e Bolza. Deste meados do século XX, o cálculo das variações alargou-se a vários ramos: foi crescendo até aos dias de hoje, encontrando inúmeras aplicações práticas, na física, economia, ciências dos materiais, engenharia e biologia [9]. Foi da aplicação do cálculo das variações à física que Emmy Noether chegou ao seu famoso teorema, que estabelece uma relação entre a existência de simetrias das funcionais integrais (1) e a existência de leis de conservação. Como caso particular do teorema de Noether podemos explicar todas as leis de conservação da mecânica. O nosso objetivo principal é introduzir o moderno cálculo das variações estocástico e, em particular, obter uma formulação estocástica para o teorema de Noether.

O trabalho encontra-se organizado em seis secções. Começamos, na Secção 2, por introduzir o cálculo das variações clássico/determinístico, estudando os conteúdos mais importantes de um qualquer cálculo das variações: formulação do problema fundamental (2), demonstração da equação de Euler–Lagrange (3), definição de extremal (Definição 3) e obtenção da condição necessária de DuBois–Reymond (6). Na Secção 3 demonstramos o teorema clássico de Noether (Teorema 9). Como exemplos ilustrativos de leis de conservação, obtemos conservação da quantidade de movimento (Exemplo 10) e conservação de energia (Exemplo 11). Na Secção 4 introduzimos, com detalhe, o cálculo das variações estocástico. O resultado principal do trabalho, o teorema de Noether estocástico (Teorema 43), é demonstrado na Secção 5. Terminamos com a Secção 6 de conclusão, apontando um problema em aberto: a obtenção de um teorema de Noether estocástico para o caso não autónomo, com mudança da variável independente.

## 2 O Cálculo das Variações

O cálculo das variações é quase tão antigo quanto o próprio Cálculo, tendo, os dois assuntos, sido desenvolvidos em paralelo. O cálculo variacional é um alicerce de muitas teorias em Física e tem um papel fundamental nessa área bem como na Matemática. O problema de minimizar funcionais do tipo (1) é, via de regra, sujeito a diferentes tipos de restrições como, por exemplo:

- condições em  $x$  nas extremidades do intervalo, i.e.,  $x(a) = A$  e/ou  $x(b) = B$ ;
- exigir que  $g(t, x(t), \dot{x}(t)) \equiv 0$  para  $t \in [a, b]$ , onde  $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dada;
- exigir que  $\int_a^b g(t, x(t), \dot{x}(t)) dt = c$ , onde  $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $c \in \mathbb{R}$ .

O primeiro tipo de restrição é denominado *condição de contorno* e pode ser exigido em ambos ou em apenas um dos extremos do intervalo  $[a, b]$ . O segundo tipo de restrição é denominado de *restrição Lagrangiana*, devido à sua semelhança com as restrições presentes nos problemas da mecânica Lagrangiana. O terceiro tipo é denominado de *restrição isoperimétrica* (ou integral), uma vez que os primeiros problemas relacionados com esta restrição apresentavam a exigência dos candidatos  $x$  terem todos o mesmo comprimento/perímetro. O intervalo  $[a, b]$  não precisa ser necessariamente fixo. Este é o caso quando uma das condições de contorno é descrita pela curva de nível de uma dada função  $\sigma : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}$ . Temos então uma restrição do tipo

- $\sigma(T, x(T)) = 0$ ,  $T > a$ ,

que é denominada *condição (de contorno) transversal*. As restrições acima podem aparecer de forma combinada, de modo que um mesmo problema pode estar sujeito a restrições de diferentes tipos ou a várias restrições do mesmo tipo. Analisamos aqui apenas os problemas com condições de contorno. O problema fundamental consiste na determinação de uma função  $x(\cdot) \in C^2$  que minimiza uma dada funcional  $J[\cdot]$  quando sujeita a duas condições de contorno:

$$\begin{aligned} J[x(\cdot)] &= \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \longrightarrow \min, \\ x(\cdot) &\in C^2([a, b]; \mathbb{R}^n), \\ x(a) &= A, \quad x(b) = B, \end{aligned} \tag{2}$$

onde supomos  $a < b$ ,  $A, B \in \mathbb{R}^n$  e  $L(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^2$  em relação a todos os seus argumentos. Para facilidade de apresentação, consideramos de seguida o caso escalar, isto é,  $n = 1$ .

**Teorema 1** (Condição necessária de otimalidade para o problema (2) — equação de Euler–Lagrange). *Se  $x(\cdot)$  é minimizante do problema (2), então  $x(\cdot)$  satisfaz a equação de Euler–Lagrange:*

$$L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0. \quad (3)$$

*Demonstração.* (seguindo Lagrange) Seja  $x(\cdot)$  um minimizante do problema (2). Considere-se uma função admissível, na vizinhança de  $x(\cdot)$ , arbitrária. Tal função pode ser escrita na forma  $x(\cdot) + \varepsilon\phi(\cdot)$ , com  $\phi(a) = \phi(b) = 0$ . Por definição de minimizante, a função

$$\Phi(\varepsilon) = J[x(\cdot) + \varepsilon\phi(\cdot)] = \int_a^b L\left(t, x(t) + \varepsilon\phi(t), \dot{x}(t) + \varepsilon\dot{\phi}(t)\right) dt$$

tem mínimo para  $\varepsilon = 0$ , para qualquer  $\phi(\cdot)$ . Como a funcional  $J$  tem um mínimo em  $x(\cdot)$  e  $x(a) + \varepsilon\phi(a) = A$  e  $x(b) + \varepsilon\phi(b) = B$ , então  $\Phi(\varepsilon)$  tem mínimo no ponto  $\varepsilon = 0$ . Logo,

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left( \bar{L}_x(t)\phi(t) + \bar{L}_{\dot{x}}(t)\dot{\phi}(t) \right) dt = 0,$$

onde  $\bar{L}_x(t) = L_x(t, x(t), \dot{x}(t))$  e  $\bar{L}_{\dot{x}}(t) = L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$ . Integrando por partes, vem que

$$\int_a^b \bar{L}_{\dot{x}}(t)\dot{\phi}(t)dt = \bar{L}_{\dot{x}}(t)\phi(t) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{x}}(t)\phi(t) = - \int_a^b \frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{x}}(t)\phi(t)$$

e, então,

$$0 = \Phi'(0) = \int_a^b \left( \bar{L}_x(t)\phi(t) + \bar{L}_{\dot{x}}(t)\dot{\phi}(t) \right) dt = \int_a^b \left( \bar{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{x}}(t) \right) \phi(t)dt. \quad (4)$$

Utilizamos, agora, o seguinte lema auxiliar, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [6] ou em [11].

**Lema 2** (Lema fundamental do cálculo das variações). *Se  $g(\cdot)$  é contínua em  $[a, b]$  e*

$$\int_a^b g(x)\phi(x)dx = 0$$

*para todas as funções  $\phi \in C^2([a, b]; \mathbb{R})$  com  $\phi(a) = \phi(b) = 0$ , então  $g(x) \equiv 0$ .*

De (4) resulta do Lema 2 a conclusão pretendida:  $\bar{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{x}}(t) = 0$ . □

**Definição 3.** *As soluções da equação diferencial de Euler–Lagrange (3) (desconsiderando as condições de contorno) são denominadas funções estacionárias ou extremais, independentemente do facto de serem ou não soluções do problema variacional (2).*

Vamos apresentar um exemplo de aplicação do Teorema 1.

**Exemplo 4.** Considere-se a funcional integral

$$J[x(\cdot)] = \int_0^\pi (\dot{x}^2(t) - kx^2(t)) dt \quad (5)$$

sob as condições de contorno  $x(0) = x(\pi) = 0$ , onde  $k$  é uma constante positiva. As funções admissíveis pertencem à classe  $C^2$ . Se  $x(\cdot)$  é minimizante de (5), então resulta de (3) que

$$\frac{d}{dt}(2\dot{x}(t)) + 2kx(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + kx(t) = 0.$$

Trata-se de uma equação diferencial ordinária homogénea, de coeficientes constantes, com solução

$$x(t) = C_1 \cos(\sqrt{k}t) + C_2 \sin(\sqrt{k}t),$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração. As condições de contorno  $x(0) = x(\pi) = 0$  implicam que  $C_1 = 0$  e  $C_2 \sin(\sqrt{k}\pi) = 0$ . Duas situações ocorrem, consoante  $\sqrt{k}$  é, ou não, um número inteiro. Se  $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$ , então  $\sin(\sqrt{k}\pi) = 0$  e, nesta situação, temos uma infinidade de extremais da forma  $x(t) = C_2 \sin(\sqrt{k}t)$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}$ . Se  $\sqrt{k}$  não for um inteiro, então  $C_2 = 0$  e a única extremal é  $x(t) = 0$ ,  $\forall t \in [0, \pi]$ .

Uma outra condição necessária clássica do cálculo das variações é a condição necessária de DuBois–Reymond.

**Teorema 5.** *Uma condição necessária para  $x(\cdot)$  ser solução do problema fundamental do cálculo das variações é dada pela condição de DuBois–Reymond:*

$$\frac{\partial L}{\partial t}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt} \left\{ L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{x}(t) \right\}. \quad (6)$$

*Demonstração.* Veja-se [11, Corolário 59]. □

### 3 Teorema Clássico de Noether

Emmy Noether, nascida em março de 1882 na Bavária, Alemanha, é considerada a “mãe” da Álgebra Moderna (Abstrata). Após Albert Einstein publicar a sua teoria da Relatividade Geral, os matemáticos ficaram alvoroçados e permitiram-se explorar as propriedades desse novo e revolucionário território. A famosa teoria da Relatividade, além de rudimentar e estranha, apresentava problemas. Emmy Noether deu resposta a importantes questões, valendo-se da simetria dos problemas variacionais. O teorema de Noether afirma que as leis de conservação são resultado das leis de simetria e constituiu um grande avanço para a época.

Encontrar a solução geral da equação de Euler–Lagrange (3) consiste em determinar soluções de uma equação diferencial de segunda ordem, geralmente não linear e de difícil resolução. As leis de conservação são especificadas por funções  $\Phi(t, x(t), \dot{x}(t))$  constantes ao longo de todas as soluções  $x$  da equação de Euler–Lagrange, o que permite baixar a ordem das equações diferenciais dadas pelas condições necessárias de otimalidade, simplificando o processo de resolução dos problemas do cálculo das variações (e controlo ótimo) [10].

Vamos considerar um grupo uni-paramétrico de transformações de classe  $C^2$ , da forma

$$\bar{t} = \Phi(t, x, \varepsilon), \quad \bar{x} = \Psi(t, x, \varepsilon), \quad (7)$$

onde  $\Phi$  e  $\Psi$  são funções analíticas de  $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Admitimos que a transformação (7) para  $\varepsilon = 0$  reduz-se à identidade:  $\bar{t} = \Phi(t, x, 0) = t$  e  $\bar{x} = \Psi(t, x, 0) = x$ . Numa vizinhança de  $\varepsilon = 0$ ,  $\Phi$  e  $\Psi$  podem ser expandidas em série de Taylor:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + \varepsilon \frac{\partial \Phi(t, x, 0)}{\partial \varepsilon} + \varepsilon^2 \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Phi(t, x, 0)}{\partial \varepsilon^2} \dots = t + T(t, x)\varepsilon + o(\varepsilon), \\ \bar{x}(\bar{t}) &= x(t) + \varepsilon \frac{\partial \Psi(t, x, 0)}{\partial \varepsilon} + \varepsilon^2 \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Psi(t, x, 0)}{\partial \varepsilon^2} \dots = x + X(t, x)\varepsilon + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

onde

$$T(t, x) = \frac{\partial \Phi(t, x, 0)}{\partial \varepsilon}, \quad X(t, x) = \frac{\partial \Psi(t, x, 0)}{\partial \varepsilon}.$$

Na literatura, as funções  $T$  e  $X$  são designadas por geradores infinitesimais das transformações  $\Phi$  e  $\Psi$ , respetivamente.

**Definição 6** (Invariância de uma funcional integral (1) do cálculo das variações). Dizemos que a funcional integral (1) é invariante sob as transformação infinitesimais

$$\begin{cases} \bar{t} = t + T(t, x)\varepsilon + o(\varepsilon), \\ \bar{x} = x + X(t, x)\varepsilon + o(\varepsilon), \end{cases}$$

se

$$\int_{t_a}^{t_b} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt = \int_{\bar{t}(t_a)}^{\bar{t}(t_b)} L(\bar{t}, \bar{x}(\bar{t}), \dot{\bar{x}}(\bar{t})) d\bar{t} \quad (8)$$

para todo o subintervalo  $[t_a, t_b] \subseteq [a, b]$ .

**Teorema 7** (Condição necessária de invariância). Se a funcional integral (1) é invariante no sentido da Definição 6, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t}(t, x(t), \dot{x}(t))T(t, x) + \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))X(t, x) \\ + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \left( \dot{X}(t, x) - \dot{x}\dot{T}(t, x) \right) + L(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{T}(t, x) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

*Demonstração.* A equação (8) é válida para todo o subintervalo  $[t_a, t_b] \in [a, b]$ , o que nos permite escrever esta equação sem o sinal de integral, ou seja, se

$$\begin{cases} \bar{t} = t + T(t, x)\varepsilon + o(\varepsilon), \\ \bar{x} = x + X(t, x)\varepsilon + o(\varepsilon), \\ \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\bar{x} + \varepsilon \dot{X} + o(\varepsilon)}{1 + \varepsilon \dot{T} + o(\varepsilon)}, \end{cases}$$

então

$$L(t, x(t), \bar{x}(t)) = L\left(t + T(t, x)\varepsilon + o(\varepsilon), x + X(t, x)\varepsilon + o(\varepsilon), \frac{\dot{x} + \varepsilon \dot{X} + o(\varepsilon)}{1 + \varepsilon \dot{T} + o(\varepsilon)}\right) \frac{d\bar{t}}{dt}.$$

Derivando os dois membros da igualdade em ordem a  $\varepsilon$ , e fazendo  $\varepsilon = 0$ , vem que

$$0 = \frac{\partial L}{\partial t}(t, x, \dot{x})T + \frac{\partial L}{\partial x}(t, x, \dot{x})X + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}) \left( \dot{X} - \dot{x}\dot{T} \right) + L(t, x, \dot{x})\dot{T}.$$

□

**Exemplo 8.** Consideremos a funcional integral

$$J[x(\cdot)] = \int_a^b \dot{x}^2(t) dt. \quad (10)$$

Neste caso temos  $L(t, x(t), \dot{x}(t)) = \dot{x}(t) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}(t)$ . Como

$$\begin{aligned} T(t, x) \Rightarrow \dot{T} &= \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial T}{\partial x}, \\ X(t, x) \Rightarrow \dot{X} &= \frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial X}{\partial x}, \end{aligned}$$

da equação (9) resulta que

$$\begin{aligned} 2\dot{x}(t) \left( \frac{\partial X}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial X}{\partial x} - \dot{x} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right) + \dot{x}^2 \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial T}{\partial x} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \dot{x}^3 \frac{\partial T}{\partial x} + \dot{x} \left( 2 \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial t} \right) + 2\dot{x} \frac{\partial X}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$2\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (12)$$

$$2\frac{\partial X}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

De (11) podemos afirmar que  $T$  não depende de  $x$ . Então  $T(t, x) = T(t)$  e de (13) concluímos que  $X$  não depende de  $t$ , isto é,  $X(t, x) = X(x)$ . A equação (12) é satisfeita se  $2\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial t}$ . Isto implica que  $2\frac{\partial X}{\partial x} = \text{constante} = \frac{\partial T}{\partial t}$ , ou seja,

$$X(x) = cx + b_1, \quad T(t) = 2ct + b_2, \quad (14)$$

onde  $c$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são constantes. Podemos verificar que os geradores infinitesimais definidos em (14) representam as simetrias para que a funcional (10) seja invariante no sentido da Definição 6.

O próximo teorema é um dos resultados mais importante da Física moderna e não só: o teorema de Noether, que foi formulado e demonstrado em 1918 por Emmy Noether, é muito mais que um teorema. É um princípio geral sobre leis de conservação, com importantes implicações em várias áreas da Física Moderna, na Química, na Economia, nos problemas Estocásticos, etc.

**Teorema 9** (Teorema de Noether). *Se a funcional integral (1) é invariante no sentido da Definição 6, então*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))X(t, x(t)) - \left( L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) \right) T(t, x(t)) = \text{const} \quad (15)$$

é uma lei de conservação.

*Demonstração.* Vamos fazer a demonstração do teorema de Noether usando a condição de DuBois–Reymond dada pelo Teorema 5. A equação de Euler–Lagrange (3) diz-nos que

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

Podemos então escrever a condição necessária de invariância (9) como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L}{\partial t}(t, x(t), \dot{x}(t))T(t, x(t)) + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))X(t, x(t)) \\ & + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \left( \dot{X}(t, x(t)) - \dot{x}(t)\dot{T}(t, x(t)) \right) + L(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{T}(t, x(t)) = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))X(t, x(t)) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{X}(t, x(t)) \\ & + \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t))T(t, x(t)) + \dot{T}(t, x(t)) \left( L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) \right) = 0. \quad (16) \end{aligned}$$

Usando a condição de DuBois–Reymond (Teorema 5) podemos escrever (16) na forma

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))X(t, x(t)) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{X}(t, x(t)) \\ & + \frac{d}{dt} \left\{ L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) \right\} T(t, x(t)) \\ & + \dot{T}(t, x(t)) \left( L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))X(t, x(t)) + \left( L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) \right) T(t, x(t)) \right\} = 0. \end{aligned}$$

□

A título de exemplo, obtemos as leis de conservação da quantidade de movimento e energia.

**Exemplo 10** (Conservação da quantidade de movimento). Se a função  $L$  não depende de  $x$ , i.e.,  $L = L(t, \dot{x})$ , ocorre conservação da quantidade de movimento. Com efeito, neste caso a equação de Euler–Lagrange (3) toma a forma  $\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, \dot{x}(t)) = 0$ , o que implica a lei de conservação

$$L_{\dot{x}}(t, \dot{x}(t)) = \text{constante}. \quad (17)$$

Este facto pode ser obtido por intermédio do Teorema 9 já que o Lagrangiano  $L$  é invariante sob translações em  $x$ : podemos fazer  $\bar{t} = t$  ( $T \equiv 0$ ) e  $\bar{x} = x + \varepsilon$  ( $X \equiv 1$ ) e (15) reduz-se a (17).

**Exemplo 11** (Conservação de energia). Se a função  $L$  não depende de  $t$ , i.e.,  $L = L(x, \dot{x})$ , então obtemos a lei de conservação de energia:

$$\dot{x}(t)L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t)) = \text{constante}. \quad (18)$$

Com efeito, para toda a solução  $x$  da equação de Euler–Lagrange, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \dot{x}(t)L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t)) \right) \\ &= \frac{d}{dt} (\dot{x}(t)L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))) - \frac{d}{dt} (L(x(t), \dot{x}(t))) \\ &= \ddot{x}L_{\dot{x}} + \dot{x}L_x - \dot{x}L_x - \ddot{x}L_{\dot{x}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

A lei de conservação (18) resulta de (15) devido ao facto do Lagrangiano  $L$  ser invariante sob translações em  $t$ : temos invariância sob as transformações  $\bar{t} = t + \varepsilon$  ( $T \equiv 1$ ) e  $\bar{x} = x$  ( $X \equiv 0$ ).

## 4 Cálculo das Variações Estocástico

Nesta secção consideramos as derivadas de Nelson, propostas por Edward Nelson em 1967 usando um argumento geométrico [8]. A não diferenciabilidade das trajetórias de um movimento Browniano, em processos de Winer, foi usada por Nelson para justificar o facto de se precisar de um substituto para a derivada clássica. Aqui definimos derivadas de Nelson para os Bons Processos de Difusão (movimento Browniano) e damos algumas propriedades das derivadas estocásticas.

### 4.1 Derivada Estocástica de Nelson

Nesta secção vamos ver algumas das propriedades das derivadas estocásticas, nomeadamente a regra da derivada do produto para derivadas de Nelson. Definimos derivadas estocásticas para funcionais de processos de difusão e especificamos quando um processo é Nelson diferenciável.

Consideremos um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , onde  $(\Omega, \mathcal{F})$  é um espaço mensurável e  $P$  uma probabilidade nele definida. O espaço amostral  $\Omega$  representa o conjunto (suposto não-vazio) de todos os possíveis resultados de uma experiência ou fenómeno aleatório;  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra, isto é, uma classe não-vazia de subconjuntos de  $\Omega$  fechada para o complementar (se  $A \in \mathcal{F}$ , então o complemento é definido por  $A^c := \Omega - A \in \mathcal{F}$ ) e para uniões contáveis (se  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , então  $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$ ). Os conjuntos  $A \in \mathcal{F}$  são chamados acontecimentos ou conjuntos mensuráveis. A probabilidade  $P$  é uma função de  $\mathcal{F}$  em  $[0, 1]$ , normada ( $P(\Omega) = 1$ ) e  $\sigma$ -aditiva. Seja  $\mathcal{P}_t$  uma filtração, isto é, uma sucessão  $\mathcal{P}_t$  da  $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ , crescente, isto é, tal que  $\mathcal{P}_t \leq \mathcal{P}_{t+1}$  e  $\mathcal{F}_t$  é uma filtração decrescente.

**Definição 12.** Dizemos que  $X$  é adaptada a  $\mathcal{P}_t$  (adaptada a  $\mathcal{F}_t$ ) se, para cada  $t$ ,  $X$  é  $\mathcal{P}_t$  mensurável ( $\mathcal{F}_t$  mensurável).

**Definição 13.** Seja  $X_t(\cdot)$  um processo definido em  $I \times \Omega$ . O processo diz-se um S0-processo se:  $X_t(\cdot)$  tem um caminho simples contínuo;  $X_t(\cdot)$  é  $\mathcal{P}_t$  e  $\mathcal{F}_t$  adaptado para cada  $t \in \bar{I}$ ;  $X_t \in L^2(\Omega)$ ; e a aplicação  $t \rightarrow X_t$ , de  $\bar{I}$  em  $L^2(\Omega)$ , é contínua.

**Definição 14** ([3]). *Seja  $X_t(\cdot)$  um processo. Dizemos que  $X_t(\cdot)$  é um S1-processo se ele for um S0-processo e*

$$DX_t := \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} E[X_{t+h} - X_t | \mathcal{P}_t],$$

$$D_*X_t := \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} E[X_t - X_{t-h} | \mathcal{F}_t],$$

*existirem em  $L^2(\Omega)$ , para  $t \in I$ , e as aplicações  $t \rightarrow DX_t$  e  $t \rightarrow D_*X_t$  forem contínuas de  $I$  em  $L^2(\Omega)$ . A  $DX_t$  e  $D_*X_t$  chamamos, respetivamente, derivada de Nelson estocástica à direita e à esquerda.*

**Definição 15.** *Denotamos por  $\mathcal{C}^1(I)$  o espaço dos S1-processos munido da norma*

$$\|X\| = \sup_{t \in I} (\|X(t)\|_{L^2(\omega)} + \|DX(t)\|_{L^2(\omega)} + \|D_*X(t)\|_{L^2(\omega)}).$$

Vamos agora enunciar um teorema para as derivadas de Nelson dos bons processos de difusão.

**Definição 16** (Definição 1.5 de [4]). *Denotamos por  $\Lambda^1$  os processos de difusão  $X$  que satisfazem as seguintes condições:*

1.  *$X$  é solução da equação diferencial estocástica*

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(0) = X_0,$$

*onde  $X_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $W(\cdot)$  é movimento  $\mathcal{P}$ -Browniano,  $b : \bar{I} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $\sigma : \bar{I} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$  são funções Borel mensuráveis satisfazendo as seguintes hipóteses: existe uma constante  $K$  tal que para todos os  $x, y \in \mathbb{R}^d$  temos*

$$\sup_t (|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)|) \leq K|x - y|,$$

$$\sup_t (|\sigma(t, x)| + |b(t, x)|) \leq K(1 + |x|).$$

2. *Para todo o  $t \in I$ ,  $X(t)$  tem uma função densidade  $p_t(x)$  no ponto  $x$ .*
3. *Fixando  $a_{ij} = (\sigma\sigma^*)_{ij}$ , para qualquer  $i \in \{1, \dots, n\}$  e para qualquer  $t_0 \in I$ ,*

$$\int_{t_0}^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_j(a_{ij}(t, x)p_t(x))| dx dt < +\infty.$$

4.  *$X(\cdot)$  é uma difusão  $\mathcal{F}$ -Browniana.*

**Teorema 17** ([4]). *Seja  $X \in \Lambda^1$  tal que  $dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$ . Então  $X$  é difusão de Markov com a respetiva filtração crescente  $(\mathcal{P}_t)$  e filtração decrescente  $(\mathcal{F}_t)$ . Além disso,  $DX$  e  $D_*X$  existem em relação a estas filtrações, sendo dadas por*

$$DX(t) = b(t, X(t)), \quad D_*X(t) = b_*(t, X(t)),$$

*onde*

$$b_*^i(t, x) = b^i(t, x) - \frac{\partial_j(a^{ij}(t, x)p_t(x))}{p_t(x)}$$

*com  $x \rightarrow p_t(x)$  a densidade de  $X(t)$  em  $x$  e a convenção que o termo  $\frac{1}{p_t(x)}$  é zero se  $p_t(x) = 0$ .*

**Definição 18.** *Denotamos por  $\mathcal{D}_\mu$  o operador definido por*

$$\mathcal{D}_\mu = \frac{D + D_*}{2} + i\mu \frac{D - D_*}{2}, \quad \mu = \pm 1.$$



Vamos definir derivadas estocásticas para as funcionais dos processos de difusão  $f(t, X_t)$ , onde  $X_t$  é um processo de difusão e  $f$  uma função suave.

**Definição 19.** Denotamos por  $C_b^{1,2}(I \times \mathbb{R}^d)$  o conjunto das funções  $f : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ , tais que  $\partial_t f$ ,  $\nabla f$  e  $\partial_{x_i x_j} f$  existem e são limitadas.

**Lema 20** ([4]). Se  $X \in \Lambda^1$  e  $f \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R}^d)$ , então

$$Df(t, X(t)) = \left[ \partial_t f + DX(t) \cdot \nabla f + \frac{1}{2} a^{ij} \partial_{x_i x_j} f \right] (t, X(t)),$$

$$D_* f(t, X(t)) = \left[ \partial_t f + D_* X(t) \cdot \nabla f - \frac{1}{2} a^{ij} \partial_{x_i x_j} f \right] (t, X(t)).$$

**Corolário 21** ([4]). Se  $X \in \Lambda^1$  e  $f \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R}^d)$ , então

$$\mathcal{D}_\mu f(t, X(t)) = \left[ \partial_t f + \mathcal{D}_\mu X(t) \cdot \nabla f + \frac{i\mu}{2} a^{ij} \partial_{x_i x_j} f \right] (t, X(t)).$$

**Corolário 22** ([4]). Se  $X \in \Lambda^1$  com coeficiente de difusão constante  $\sigma$  e  $f \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R}^d)$ , então

$$\mathcal{D}_\mu f(t, X(t)) = \left[ \partial_t f + \mathcal{D}_\mu X(t) \cdot \nabla f + \frac{i\mu\sigma^2}{2} \Delta f \right] (t, X(t)).$$

O teorema que se segue dá-nos a fórmula para o cálculo da derivada do produto estocástico de Nelson, análoga à regra usual de Leibniz  $(fg)' = f'g + fg'$  da derivada do produto.

**Teorema 23** ([4]). Se  $X, Y \in \mathcal{C}^1(I)$ , então

$$\frac{d}{dt} E[X(t)Y(t)] = E[DX(t) \cdot Y(t) + X(t) \cdot D_* Y(t)].$$

**Lema 24** ([4]). Se  $X, Y \in \mathcal{C}^1(I)$ , então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[X(t)Y(t)] &= E[Re(\mathcal{D}X(t)) \cdot Y(t) + X(t) \cdot Re(\mathcal{D}Y(t))], \\ E[Im(\mathcal{D}X(t)) \cdot Y(t)] &= E[X(t) \cdot Im(\mathcal{D}Y(t))]. \end{aligned}$$

Vamos agora definir quando um processo é Nelson diferenciável.

**Definição 25.** Um processo  $X$  é dito de Nelson diferenciável se  $DX = D_* X$ . Escrevemos então que  $X \in \mathcal{N}^1(I)$ .

**Corolário 26** ([4]). Sejam  $X, Y \in \mathcal{C}_\mathbb{C}^1(I)$ . Se  $X$  é Nelson diferenciável, então

$$E[\mathcal{D}_\mu X(t) \cdot Y(t) + X(t) \cdot \mathcal{D}_\mu Y(t)] = \frac{d}{dt} E[X(t)Y(t)]. \quad (19)$$

Seguindo a abordagem feita em [4], vamos associar uma equação de Euler–Lagrange estocástica a uma funcional estocástica, mostrando que existe uma analogia com o Princípio da Ação Mínima. Para isso começamos por introduzir os conceitos de funcional estocástica e processo  $L$ -adaptado.

## 4.2 Funcional e Processo $L$ -adaptado

Nesta secção denotamos por  $I$  um dado intervalo aberto  $(a, b)$ ,  $a < b$ .

**Definição 27.** Um Lagrangiano admissível é uma função  $L$  tal que

1. A função  $L(x, v, t)$  é definida em  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}$ , holomorfa na segunda variável.

2.  $L$  é autônomo, isto é,  $L$  não depende do tempo:  $L(x, v, t) = L(x, v)$ .

**Definição 28.** *Seja  $L$  um Lagrangiano admissível e*

$$\Xi = \left\{ X \in \mathcal{C}^1(I), E \left[ \int_I |L(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t))| dt \right] < \infty \right\}.$$

A funcional associada a  $L$  é definida por

$$F_I : \begin{cases} \Xi \rightarrow \mathbb{C} \\ X \mapsto E \left[ \int_I L(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) dt \right] \end{cases}. \quad (20)$$

**Definição 29.** *Seja  $L$  um Lagrangiano. Um processo  $X \in \mathcal{C}^1(I)$  é chamado de  $L$ -adaptado se:*

1. para todo  $t \in I$ ,  $\partial_x L(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t))$  é  $\mathcal{P}_t$  e  $\mathcal{F}_t$  mensurável e  $\partial_x L(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) \in L^2(\Omega)$ ;
2.  $\partial_v L(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) \in \mathcal{C}^1(I)$ .

### 4.3 Espaço Variacional

O Cálculo das Variações considera o comportamento das variações no âmbito do espaço funcional subjacente. Um cuidado especial deve ser tomado no caso estocástico, para definir qual é a classe de variações que estamos a considerar. Usamos a seguinte definição:

**Definição 30.** *Seja  $\Gamma$  um subespaço de  $\mathcal{C}^1(I)$ . A  $\Gamma$ -variação de  $X$  é um processo estocástico da forma  $X + Z$ , onde  $Z \in \Gamma$ . Por outro lado,*

$$\Gamma_\Xi = \{Z \in \Gamma, \forall X \in \Xi, Z + X \in \Xi\},$$

onde  $\Gamma_\Xi$  denota um subespaço de  $\Gamma$ .

Vamos considerar dois subespaços variacionais:  $\mathcal{N}^1(I)$  e  $\mathcal{C}^1(I)$ .

### 4.4 Funcional $\Gamma$ -Diferenciável e Processo $\Gamma$ -Crítico

Vamos definir função diferenciável. No que se segue  $\Gamma$  é um subespaço de  $\mathcal{C}^1(I)$ .

**Definição 31.** *Seja  $L$  um Lagrangiano admissível. A funcional  $F_I$  diz-se  $\Gamma$ -diferenciável em  $X \in \Xi \cap L$  se*

$$F_I(X + Z) - F_I(X) = dF_I(X, Z) + R(X, Z)$$

para todo o  $Z \in \Gamma_\Xi$ , onde  $dF_I(X, Z)$  é uma função linear e  $R(X, Z) = o(\|Z\|)$ .

A nossa próxima definição é a de processo crítico estocástico.

**Definição 32.** *Um processo  $\Gamma$ -crítico para a funcional  $F_I$  é um processo estocástico  $X \in \Xi \cap L$  tal que  $dF_I(X, Z) = 0$  para todos os  $Z \in \Gamma_\Xi$  com  $Z(a) = Z(b) = 0$ .*

O Lema 33 considera o caso em que  $\Gamma = \mathcal{C}^1(I)$  enquanto o Lema 33 considera  $\Gamma = \mathcal{N}^1(I)$ .

**Lema 33** (Cap. 7 de [4]). *Seja  $L$  um Lagrangiano admissível com todas as segundas derivadas limitadas. A funcional  $F_I$  definida em (20) é  $\mathcal{C}^1(I)$ -diferenciável para todo o  $X \in \Xi \cap L$  e  $\mathcal{C}^1(I)_\Xi = \mathcal{C}^1(I)$ . Para todos os  $Z \in \mathcal{C}^1(I)$ , o diferencial de  $F_I$  é dado por*

$$dF_I(X, Z) = E \left[ \int_a^b \left[ \frac{\partial L}{\partial x}(X(u), \mathcal{D}_\mu X(u)) - \mathcal{D}_{-\mu} \left( \frac{\partial L}{\partial x}(X(u), \mathcal{D}_\mu X(u)) \right) \right] Z(u) du \right] \\ + g(Z, \partial_v L)(b) - g(Z, \partial_v L)(a),$$

onde  $g(Z, \partial_v L)(s) = E [Z(u) \partial_v L(X(u), \mathcal{D}_\mu X(u))]$ .

**Lema 34** (Cap. 7 de [4]). *Seja  $L$  um Lagrangiano admissível com todas as segundas derivadas limitadas. A funcional  $F_I$  definida em (20) é  $\mathcal{N}^1(I)$ -diferenciável para todo o  $X \in \Xi \cap \mathcal{L}$  e  $\mathcal{N}^1(I)_\Xi = \mathcal{N}^1(I)$ . Para todos os  $Z \in \mathcal{N}^1(I)$ , o diferencial é dado por*

$$dF_I(X, Z) = E \left[ \int_a^b \left[ \frac{\partial L}{\partial x}(X(u), \mathcal{D}_\mu X(u)) - \mathcal{D}_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial x}(X(u), \mathcal{D}_\mu X(u)) \right) \right] Z(u) du \right] \\ + g(Z, \partial_v L)(b) - g(Z, \partial_v L)(a),$$

onde  $g(Z, \partial_v L)(s) = E[Z(u) \partial_v L(X(u), \mathcal{D}_\mu X(u))]$ .

## 4.5 Equação de Euler–Lagrange Estocástica

Nesta secção vamos determinar a equação de Euler–Lagrange estocástica. Também aqui, consideramos dois casos para o subespaço variacional:  $\mathcal{N}^1(I)$  e  $\mathcal{C}^1(I)$ .

### 4.5.1 Caso $\mathcal{C}^1(I)$

**Teorema 35.** *Seja  $L$  um Lagrangiano admissível com todas as segundas derivadas limitadas. Uma condição necessária e suficiente para que o processo  $\Xi \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}^3(I)$  seja um processo  $\mathcal{C}^1(I)$ -crítico associado à funcional  $F_I$  é dada por*

$$\frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu} \left[ \frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) \right] = 0. \quad (21)$$

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, consideramos  $I = (0, 1)$ . Seja  $X \in \mathcal{C}^3(I)$  uma solução de

$$\frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu} \left[ \frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) \right] = 0.$$

Então,  $X$  é  $\mathcal{C}^1(I)$ -crítico associado à funcional  $F_I$ . Se  $X$  é  $\mathcal{C}^1(I)$ -crítico associado à funcional  $F_I$ , isto é,  $dF_I(X, Z) = 0$ , temos

$$Re(dF_I(X, Z)) = Im(dF_I(X, Z)) = 0.$$

Vamos definir

$$Z_n^{(1)}(u) = \phi_n^{(1)}(u) \cdot Re \left( \frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu} \left[ \frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) \right] \right)$$

e

$$Z_n^{(2)}(u) = \phi_n^{(2)}(u) \cdot Im \left( \frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu} \left[ \frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) \right] \right),$$

onde  $(\phi_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de  $C^\infty([0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+)$  determinística em  $[0, 1]$ , isto é, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\phi_n(0) = \phi_n(1) = 0$  e  $\phi_n = 1$  em  $[\alpha_n, \beta_n]$  com  $0 < \alpha_n, \beta_n < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1$ . Assim, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$Re(dF_I(X, Z_n^{(1)})) = E \left[ \int_0^1 \phi_n(u) Re^2 \left( \frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu} \left[ \frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) \right] \right) du \right] = 0,$$

$$E \left[ \int_0^1 Re^2 \left( \frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu} \left[ \frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) \right] \right) du \right] = 0.$$

Usando o mesmo argumento,

$$E \left[ \int_0^1 Im^2 \left( \frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu} \left[ \frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) \right] \right) du \right] = 0.$$

Portanto, para quase todos os  $t \in [0, 1]$  e quase todos  $w \in \Omega$ ,

$$\frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_{-\mu} \left[ \frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) \right] = 0.$$

□

A equação (21) é chamada de equação de Euler–Lagrange estocástica.

#### 4.5.2 Caso $\mathcal{N}^1(I)$

A demonstração do próxima lema pode ser encontrada no Cap. 7 de [4].

**Lema 36.** *Seja  $L$  um Lagrangiano admissível com as segundas derivadas limitadas. Se  $X$  é solução da equação de Euler–Lagrange estocástica*

$$\frac{\partial L}{\partial x}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) - \mathcal{D}_\mu \left[ \frac{\partial L}{\partial v}(X(t), \mathcal{D}_\mu X(t)) \right] = 0,$$

*então  $X$  é um processo  $\mathcal{N}^1(I)$ -crítico para a funcional  $F_I$  associada a  $L$ .*

## 5 Teorema de Noether Estocástico

Nesta secção vamos demonstrar um Teorema de Noether no contexto estocástico para problemas autónomos. Para isso vamos definir, seguindo Cresson [3], vetor tangente a um processo estocástico, suspensão estocástica de uma família paramétrica de difeomorfismos, invariância e primeiro integral estocástico.

Seja  $X \in \mathcal{C}^1(I)$  um processo estocástico. Definimos *vetor tangente* a um processo estocástico de modo análogo a vetor tangente de  $X$  no ponto  $t$ .

**Definição 37.** *Seja  $X \in \mathcal{C}^1(I)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ . O vetor tangente a  $X$  no ponto  $t$  é dado por  $\mathcal{D}X(t)$ .*

Vamos agora introduzir a noção de suspensão estocástica de uma família paramétrica de difeomorfismos.

**Definição 38.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  um difeomorfismo. A suspensão estocástica de  $\phi$  é a aplicação  $\Phi : P \rightarrow P$  definida por*

$$\forall X \in P, \Phi(X)_t(w) = \phi(X_t(w)).$$

**Definição 39.** *Um grupo uni-paramétrico de transformações  $\Phi_s : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , onde  $\Upsilon \subset P$ , é chamado de  $\phi$ -grupo de suspensão agindo em  $\Upsilon$  se existir um grupo uni-paramétrico de difeomorfismos  $\phi_s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , de tal forma que para todo o  $s \in \mathbb{R}$  temos:*

1.  $\Phi_s$  é uma suspensão estocástica de  $\phi_s$ ;
2.  $X \in \Upsilon$ ,  $\phi_s(X) \in \Upsilon$ .

**Lema 40** ([3]). *Seja  $\Phi = (\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$  uma suspensão estocástica de um grupo uni-paramétrico de difeomorfismos. Então, para todo o  $X \in \Lambda$ , temos para todo o  $t \in I$  e todo o  $s \in \mathbb{R}$  que*

1. a aplicação  $s \mapsto \mathcal{D}_\mu \Phi_s X(t) \in C^1(\mathbb{R})$ ;
2.  $\frac{\partial}{\partial s} [\mathcal{D}_\mu(\phi_s(X))] = \mathcal{D}_\mu \left[ \frac{\partial \phi_s(X)}{\partial s} \right]$ .

Seja  $X \in \mathcal{C}^\infty(I)$  e  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  um difeomorfismo. A imagem de  $X$  sob a suspensão estocástica de  $\phi$ , denotada por  $\Phi$ , induz de modo natural uma aplicação para os vetores tangentes, denotada por  $\Phi_*$  e chamada de aplicação linear tangente, definida como na geometria diferencial clássica:

**Definição 41.** *Seja  $\Phi$  uma suspensão estocástica de um difeomorfismo  $\phi$  tal que a sua  $k$ -ésima componente  $\phi^{(k)}$  pertence a  $\mathcal{T}$ . A aplicação linear tangente associada a  $\Phi$ , e denotada por  $\Phi_*$ , é definida para todo o  $X \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{I})$  por  $\Phi_*(X) = T(\Phi(X)) = (\Phi(X), \mathcal{D}(\Phi(X)))$ .*

Obtemos então a seguinte noção de invariância sob a ação de um grupo uni-paramétrico de difeomorfismos.

**Definição 42.** *Seja  $\Phi = \{\phi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$  um grupo uni-paramétrico de difeomorfismos e seja  $L : \mathcal{C}^1(I) \rightarrow \mathcal{C}_\mathbb{C}^1(I)$ . A funcional  $L$  é invariante sob  $\Phi$  se  $L(\phi_*X) = L(X)$  para todos o  $\phi \in \Phi$ .*

Como consequência da Definição 42, se  $L$  é invariante temos que  $L(\phi_*X; D(\phi_*X)) = L(X, DX)$  para todo o  $s \in \mathbb{R}$  e  $X \in \mathcal{C}^1(I)$ . Estamos em condições de enunciar e demonstrar o teorema de Noether no contexto estocástico.

**Teorema 43** (Teorema de Noether Estocástico). *Seja  $L$  um Lagrangiano admissível com todas as segundas derivadas limitadas e invariante sob um grupo uni-paramétrico de difeomorfismos  $\Phi = \{\phi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ . Seja  $F_I$  a funcional associada a  $L$  e definida por (20) em  $\Xi$ . Seja  $X \in \Xi \cap L$  de classe  $\mathcal{C}^1(I)$  um ponto estacionário de  $F_I$ . Então,*

$$\frac{d}{dt} E \left[ \partial_v L \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} \Big|_{s=0} \right] = 0,$$

onde  $Y_s = \Phi_s(X)$ .

*Demonstração.* Seja  $Y(s, t) = \phi_s X(t)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  e  $t \in [a, b]$ . Se  $L$  é invariante sob  $\Phi = \{\phi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ , então

$$\frac{\partial}{\partial s} L(Y(s, t), \mathcal{D}_\mu Y(s, t)) = 0$$

com  $Y(\cdot, t)$  e  $\mathcal{D}_\mu Y(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \forall t \in [a, b]$ . Temos, por conseguinte,

$$\partial_x L \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} + \partial_v L \cdot \frac{\partial \mathcal{D}_\mu Y}{\partial s} = 0$$

que é equivalente a

$$\partial_x L \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} + \partial_v L \cdot \mathcal{D}_\mu \left( \frac{\partial Y}{\partial s} \right) = 0$$

com  $X = Y|_{s=0}$  um processo estacionário para  $F_I$ . Resulta então que  $\partial_x L = \mathcal{D}_\mu \partial_v L$ . Como consequência,

$$[\mathcal{D}_\mu \partial_v L] \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} + \partial_v L \cdot \mathcal{D}_\mu \left( \frac{\partial Y}{\partial s} \right) = 0$$

e

$$E \left[ [\mathcal{D}_\mu \partial_v L] \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} + \partial_v L \cdot \mathcal{D}_\mu \left( \frac{\partial Y}{\partial s} \right) \right] = 0.$$

Usando a regra do produto (19),

$$\frac{d}{dt} E \left[ \partial_v L \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} \Big|_{s=0} \right] = 0.$$

□

## 6 Conclusão

Ao longo deste trabalho estudámos problemas estocásticos do cálculo das variações e, em particular, obtivemos uma formulação estocástica do Teorema de Noether. Generalizações no contexto do controlo ótimo podem ser encontradas na dissertação de mestrado do primeiro autor [2].

O nosso estudo dos problemas estocásticos do cálculo das variações e do Teorema de Noether estocástico, foi realizado tendo em conta a abordagem proposta por Cresson e Darses em [4]. Outras abordagens são possíveis, como seja a de Zambrini [12], que em 1980 apresentou duas extensões do teorema fundamental do cálculo das variações estocástico, importantes para problemas da física que envolvem restrições [1, 13]. Lázaro-Camí e Ortega, utilizando ferramentas da análise global estocástica introduzidas por Meyer e Schwartz, obtiveram uma generalização estocástica das equações de Hamilton [7]. Recentemente, num artigo de Cresson e Darses [5], foi demonstrado que as equações de Navier–Stokes admitem uma estrutura Lagrangiana com a incorporação de sistemas estocásticos Lagrangianos. Estas equações coincidem com as equações de Euler–Lagrange de uma funcional variacional estocástica, ou seja, são sistemas de Euler–Lagrange estocásticos.

O Teorema de Noether estocástico é apresentado neste trabalho apenas para o caso autónomo. Estabelecer um teorema de Noether estocástico para o caso não autónomo, com mudança da variável independente  $t$ , é um problema em aberto.

## Referências

- [1] S. Albeverio, J. Rezende, J.-C. Zambrini. Probability and quantum symmetries. II. The theorem of Noether in quantum mechanics, *J. Math. Phys.* **47** (2006), no. 6, 062107, 61 pp.
- [2] A. C. M. Barros. Teorema de Noether do cálculo das variações e controlo óptimo estocásticos, Dissertação de Mestrado (orientador: Delfim F. M. Torres), Mestrado em Matemática Aplicada à Engenharia, Universidade de Aveiro e Universidade de Cabo Verde, 2010.
- [3] J. Cresson, S. Darses. Plongement stochastique des systèmes lagrangiens, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **342** (2006), no. 5, 333–336. [arXiv:math/0510655](#)
- [4] J. Cresson, S. Darses. Stochastic embedding of dynamical systems, *J. Math. Phys.* **48** (2007), no. 7, 072703, 54 pp. [arXiv:math/0509713](#)
- [5] J. Cresson, S. Darses. Lagrangian structures for the Stokes, Navier-Stokes and Euler equations, [arXiv:0811.3286](#)
- [6] G. S. F. Frederico. Generalizações do teorema de Noether no cálculo das variações e controlo óptimo, Tese de Doutoramento (orientador: Delfim F. M. Torres), Universidade de Cabo Verde, 2009.
- [7] J.-A. Lázaro-Camí, J.-P. Ortega. Stochastic Hamiltonian dynamical systems, *Rep. Math. Phys.* **61** (2008), no. 1, 65–122.
- [8] E. Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1967.
- [9] C. J. Silva, E. Trélat, D. F. M. Torres. O controlo óptimo e as suas múltiplas aplicações, *Bol. Soc. Port. Mat.* No. 61 (2009), 11–37. <http://arquivoescolar.org/handle/arquivo-e/87> [arXiv:0903.4019](#)
- [10] D. F. M. Torres. On the Noether theorem for optimal control, *Eur. J. Control* **8** (2002), no. 1, 56–63.
- [11] D. F. M. Torres. Introdução à optimização dinâmica, Relatório de Disciplina, Concurso de provimento de um lugar de Professor Associado em Matemática na Universidade de Aveiro, Universidade de Aveiro, 2005. <http://arquivoescolar.org/handle/arquivo-e/81>
- [12] J.-C. Zambrini. Stochastic variational problems with constraints, *Lett. Math. Phys.* **4** (1980), no. 6, 457–463.
- [13] J.-C. Zambrini. Maupertuis’ principle of least action in stochastic calculus of variations, *J. Math. Phys.* **25** (1984), no. 5, 1314–1322.